Über transfinite Funktionen. I

Von G. FODOR in Szeged

Herrn Professor László Rédei zum 60. Geburtstag gewidmet

Sei S eine Menge von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ und $\mathrm{cf}(\alpha)>0$ (d. h. ω_α sei nicht mit ω konfinal). In S seien zwei Funktionen $f(x)$ und $\delta(x)$ mit Werten aus S bzw. $W(\omega_\alpha)=\{\beta:\beta<\omega_\alpha\}$ definiert, so daß $\delta(S)$ eine zusammengehörige Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ mit $0\in\delta(S)$ ist. Wir betrachten die folgenden Bedingungen A, B, und C:

A. Für alle $\gamma\in\delta(S)$, die Mächtigkeit der Menge $\delta^{-1}\gamma=\{x\in S: :\delta(x)=\gamma\}$ ist kleiner als $\aleph_{\mathrm{cf}(\alpha)}$.

B. Für alle $x\in S$ mit $\delta(x)>0$, $\delta(f(x))<\delta(x)$ $(\delta(f(x))=\delta(x)$ für $\delta(x)=0)$ gilt.

C. Für alle $x\in S$, die Mächtigkeit der Menge $f^{-1}x=\{y\in S:f(y)=x\}$ ist kleiner als $\aleph_{\mathrm{cf}(\alpha)}$.

G. KUREPA hat den folgenden Satz bewiesen:

I. *Wenn* $\aleph_\alpha$ $(\alpha>0)$ *regulär ist, so folgt aus jeder zwei der Bedingungen* A, B *und* C, *die Negation der dritten.*

Nehmen wir an, daß S eine zusammengehörige Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ ist und seien A′ und C′ die folgenden Bedingungen:

A′. $\delta(x)$ ist bestimmt divergent,

C′. $f(x)$ ist bestimmt divergent.

Wir werden den folgenden Satz beweisen:

II. *Wenn S eine zusammengehörige Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ ist und* $\mathrm{cf}(\alpha)>0$ *gilt, so folgt aus jeder zwei der Bedingungen* A′, B *und* C′ *die Negation der dritten.*

Der Beweis des Satzes II zeigt, daß der Satz von KUREPA auch für singuläre $\aleph_\alpha$ mit $\mathrm{cf}(\alpha)>0$ gültig ist.

Es ist klar, daß A und A′ (bzw. C und C′) für reguläre $\aleph_\alpha$ gleichwertig sind. Für singuläre $\aleph_\alpha$ folgt aber weder A aus A′ (bzw. C aus C′) noch A′ aus A (bzw. C′ aus C).

Wir brauchen folgende Definitionen und Bezeichnungen (vgl. z. B. [2]). Ist A eine Ordnungszahl, so bedeute $W(A)$ die Menge aller Zahlen ξ, für die $\xi < A$ ist. Sind M und N zwei Teilmengen von $W(A)$ ohne Maximum, so heißen M und N zusammengehörig, wenn es zu jeder Ordnungszahl jeder der beiden Mengen eine größere Ordnungszahl in der anderen Menge gibt. Sind μ und ν zwei Limeszahlen, so heißt μ konfinal mit ν, wenn μ der Limes einer wachsenden Folge vom Typ ν ist. Ist α eine Limeszahl, so bedeute $\mathrm{cf}(\alpha)$ den Index der kleinsten Ordnungszahl ω_γ, mit der α konfinal ist. Eine auf einer mit $W(A)$ zusammengehörigen Teilmenge M von $W(A)$ definierte Funktion $\varphi(\xi)$ mit Werten aus $W(A)$ heißt bestimmt divergent, wenn es zu jedem $\alpha < A$ ein β gibt, so daß $\varphi(\xi) > \alpha$ für $\xi \geqq \beta$ gilt.

Wir beweisen nun den Satz II:

Beweis. Nehmen wir die Gültigkeit der Bedingungen B und C′ an. Wir beweisen, daß es sich hieraus die Negation der Bedingung A' ergibt. Daraus folgt leicht der Satz II.

Betrachten wir, für jedes $x \in S$, die Folge

$$f^0(x) = x,\ f^1(x) = f(x),\ f^2(x),\ \ldots, f^n(x), \ldots, \tag{1}$$

wobei $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ $(n > 0)$ ist.

(i) Wenn eine Zahl l mit $m \leqq l < n$ existiert, für die $\delta(f^l(x)) \neq 0$ ist, so gilt

$$f^n(x) \neq f^m(x).$$

Wäre die Behauptung falsch, so ergäbe sich aus der Bedingung B, daß einerseits

$$\delta(f^m(x)) \geqq \delta(f^{m+1}(x)) \geqq \cdots \geqq \delta(f^l(x)) > \delta(f^{l+1}(x)) \geqq \cdots \geqq \delta(f^n(x)),$$

andererseits

$$\delta(f^n(x)) = \delta(f^m(x))$$

gilt, was unmöglich ist.

Daraus folgt, daß für jedes $x \in S$ eine nicht-negative Zahl n existiert, so daß $\delta(f^n(x)) = 0$ ist. Nehmen wir an, daß die Behauptung falsch ist. Dann ergibt sich aus B und (i), daß die Elemente der Folge (1) verschieden sind und

$$\delta(x) > \delta(f(x)) > \delta(f^2(x)) > \cdots > \delta(f^n(x)) > \cdots$$

besteht. Das ist aber eine Unmöglichkeit, weil jede absteigende Folge von Ordnungszahlen nur endlich viele Glieder enthält.

Für jedes $x \in S$ bezeichnen wir mit $n(x)$ die kleinste Zahl l, für die $\delta(f^l(x)) = 0$ ist. Es sei E eine zusammengehörige Teilmenge vom Typ $\omega_{\mathrm{cf}(\alpha)}$

von S. Jedem Element x von E entspricht also eine nicht-negative ganze Zahl $n(x)$. Es sei n eine solche Zahl und

$$E_n = \{x \in E : n(x) = n\}.$$

Da $\mathrm{cf}(\alpha) > 0$ und E eine zusammengehörige Teilmenge vom Typ $\omega_{\mathrm{cf}(\alpha)}$ von S ist, so existiert ein Index n_0, so daß E_{n_0} eine zusammengehörige Teilmenge von E ist.

Es sei $H = \delta(f^{n_0}(E_{n_0}))$. Offenbar ist $H = \{0\}$. Da E_{n_0} eine mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörige Teilmenge von S ist, so folgt aus C′, daß $f^{n_0}(E_{n_0})$ auch eine zusammengehörige Teilmenge von S ist. Daraus folgt, daß $\delta(x)$ nicht bestimmt divergent ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Literatur

[1] G. Kurepa, On regressing functions, *Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.*, 4 (1958), 148—156.

[2] H. Bachmann, *Transfinite Zahlen*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge, Heft 1 (Berlin—Heidelberg—Göttingen, 1955).

(Eingegangen am 27. Mai 1960)